

Exemple 4.32 (suite)

Pour $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$

$$[\underline{v}]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \underline{v} \quad \nabla \quad 0$$

$$\mathcal{B}_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \underline{a} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{b} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Dans cette séance on va voir:

- (i) la notion de dimension
- (ii) lien entre familles libres/génératrices et bases $\longrightarrow$ extraction et complétion
- (iii) construction d'applications linéaires
- (iv) la matrice d'une application linéaire (cas général)

(17.10.2024)

§ 4.7. Dimension

Lemme 10 Soit $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$ base de V et $\mathcal{F} \subseteq V$ une famille d'au moins $p+1$ éléments. Alors $\mathcal{F}$ est liée.

(Preuve) Soit $T_B: V \rightarrow \mathbb{R}^p$. Il s'agit d'une application linéaire qui satisfait que
 $v \mapsto [v]_B$
 $T_B(B) = \{T_B(v_1), \dots, T_B(v_p)\} = B_{\text{can}} \leftarrow \text{de } \mathbb{R}^p$
 $\uparrow$ base! $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ $\uparrow$ base!
 D'après le Thm. 4.46, T_B est bijective!

On a vu dans le Thm 3.9 qu'une famille d'au moins $p+1$ vecteurs dans $\mathbb{R}^p$ est liée $\Rightarrow T_B(\mathcal{F})$ est liée $\Rightarrow T_B^{-1}(T_B(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$ est liée $\square$
 d'après le Thm. 4.46

Conséquence fondamentale (Corollaire 2): Si $B = \{v_1, \dots, v_p\}$ et $B' = \{v'_1, \dots, v'_q\}$ sont deux bases de V , alors $p = q$.

Déf. 4.47 Si un espace vectoriel V admet une base $B = \{v_1, \dots, v_p\}$, on dit que la dimension de V est p . (on écrit $\dim V = p$).

Exemple 4.32 (suite)

$\dim \mathbb{R}^n = n \leftarrow$ car $B_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
 a n éléments.

Exemple 4.34 (suite) $\dim \mathbb{P}_n = n+1 \leftarrow$ car $\mathcal{B}_{\mathbb{P}_n} = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ est base de $\mathbb{P}_n$.

Exercice $\dim M_{m \times n}(\mathbb{R}) \stackrel{?}{=} m \cdot n \leftarrow$ F.V. ? $\left\{ \begin{matrix} (100), (010), (001), (000) \\ (000), (001) \end{matrix} \right\}$ $\begin{matrix} m=3 \\ n=2 \end{matrix}$

Exemple ($\sim$ Exos 7, 9 série 7)

Méthode générale pour bases de

$\rightarrow \text{Ker}(A)$
et
 $\text{Img}(A)$

Soit $T_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'app. lin associée à $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

On veut : $\text{Ker}(T_A)$ et $\text{Img}(T_A)$
bases de : $\text{Ker}(A)$ $\text{Img}(A)$

$\text{Ker}(T_A)$: On calcule la FER de A

x_3 est libre ?

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_A \rightsquigarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A' \text{ FER de } A} \rightsquigarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 5/4 x_3 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases}$$

base de $\text{Ker}(A)$

$$\Rightarrow \text{Ker}(T_A) = \left\{ \begin{pmatrix} 5x_3/4 \\ -3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 5/4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5/4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ base de } \text{Ker}(A).$$

Img(A) | ① $T: V \rightarrow W$, $\mathcal{B}_V \subseteq V$ base de $V \Rightarrow T(\mathcal{B}_V)$ famille génératrice de W

② $\exists \mathcal{B}_W$ base de $\text{Img}(A)$ telle que $\mathcal{B}_W \subseteq T(\mathcal{B}_V)$

① On prend $\mathcal{B}_V = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ ($V = \mathbb{R}^3$ et $W = \mathbb{R}^2$) $\Rightarrow T_A(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$
($T = TA$)

② Règle: On choisit $\mathcal{B}' \subseteq T_A(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3})$ formé des colonnes dont la F.E.R. contient un pivot.

Alors $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\text{Img}(A)$.

Trois résultats fondamentaux

① Extraction (Lemme 5, p. 60) Si $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$ famille génératrice de V

$$dV$$

Conséquences: • Si $\mathcal{F}$ est fam. génératrice de $V \Rightarrow \exists \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ base de V .
• Si $\mathcal{F}$ est fam. génératrice à $\dim V$ éléments, alors elle est une base de V .

(2) **Complétion** (Thm. 4.53) Soit $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\}$ famille libre de V et $\dim V = n$.

Alors $p \leq n$ et il existe $v_{p+1}, \dots, v_n \in V$ tels que $\{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n\}$ base de V .

Conséquence: Une famille libre de V à $\dim V$ éléments est une base de V .

③ Résultat fondamental sur les applications linéaires

Soit $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$ base de V $\leftarrow$
 $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_p\} \subseteq W$ famille de W $\leftarrow$ deux EV

Alors, il existe une unique application linéaire $T: V \rightarrow W$ telle que $T(v_i) = w_i$;
 $\forall i \in [1, p]$. En plus, T bijective ssi $\mathcal{C}$ est une base (d'après le Thm. 9.46).

Exercice Soient $\bar{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\bar{w} = \begin{pmatrix} \pi \\ \sqrt{3} \\ -e \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une application linéaire bijective $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $T(\bar{v}) = \bar{w}$.

Exemple 4.36 Soit

$$V = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

(méthode d'extraction:
SEV de $\mathbb{R}^n$)

On veut une base de V . $\rightarrow$ Règle: Calculer la FER de $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et choisir les éléments de $\mathbb{F}$ qui correspondent aux colonnes de la FER avec des pivots.

Dans ce cas

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

FER $\rightsquigarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \text{ base de } V$$

1^{er} vecteur
de $\mathbb{F}$

2^{ème} vecteur
de $\mathbb{F}$

! **[RK]** Pas de "méthode" de complétion d'une fam. libre $\{v_1, \dots, v_p\}$.
Il faut: $v_{p+1} \notin \text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}, v_{p+2} \notin \text{Vect}\{v_1, \dots, v_{p+1}\}, \dots$

§4.8. Matrice d'une application linéaire

Soient

- V, W deux EV
- $T: V \rightarrow W$ app. lin

- $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$ base de V

- $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$ base de W

Déf. 4.55 La matrice de T relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ (ou la représentation matricielle de T relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$) est

$$[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T(v_1)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [T(v_m)]_{\mathcal{B}'} \end{bmatrix} \in M_{n \times m}(\mathbb{R}).$$

[Rk. J] $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \Rightarrow [T]_{\mathcal{B}_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}} = [T] \quad \square$

Propriété fondamentale

$$\underbrace{[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}}_{\in M_{n \times m}(\mathbb{R})} \cdot \underbrace{[v]_{\mathcal{B}}}_{\in \mathbb{R}^m} = \underbrace{[T(v)]_{\mathcal{B}'}}_{\in \mathbb{R}^n}, \quad \forall v \in V.$$

Exemple*
4.56

(~ Ex. 6 de la série 9)

$$T: \mathbb{P}_3 \longrightarrow \mathbb{P}_2$$

$$p \longmapsto p'$$

$$\mathcal{B}_{\text{can}} = \{1, t, t^2, t^3\}$$

$$\mathcal{B}' = \{1, 1-t, (1-t)^2\}$$

On veut $[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{bmatrix} [T(1)]_{\mathcal{B}'} & [T(t)]_{\mathcal{B}'} & [T(t^2)]_{\mathcal{B}'} & [T(t^3)]_{\mathcal{B}'} \end{bmatrix}$

$$[T(t^2)]_{\mathcal{B}'} = [2.t]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2t &= \alpha \cdot 1 + \beta \cdot (1-t) + \gamma (1-t)^2 \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) \cdot 1 \\ &\quad + (-\beta - 2\gamma)t \\ &\quad + \gamma t^2 \end{aligned}$$

S.E.L.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\beta - 2\gamma = 2 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\gamma = 0, \beta = -2, \alpha = 2}$$

$$\Rightarrow [2.t]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$